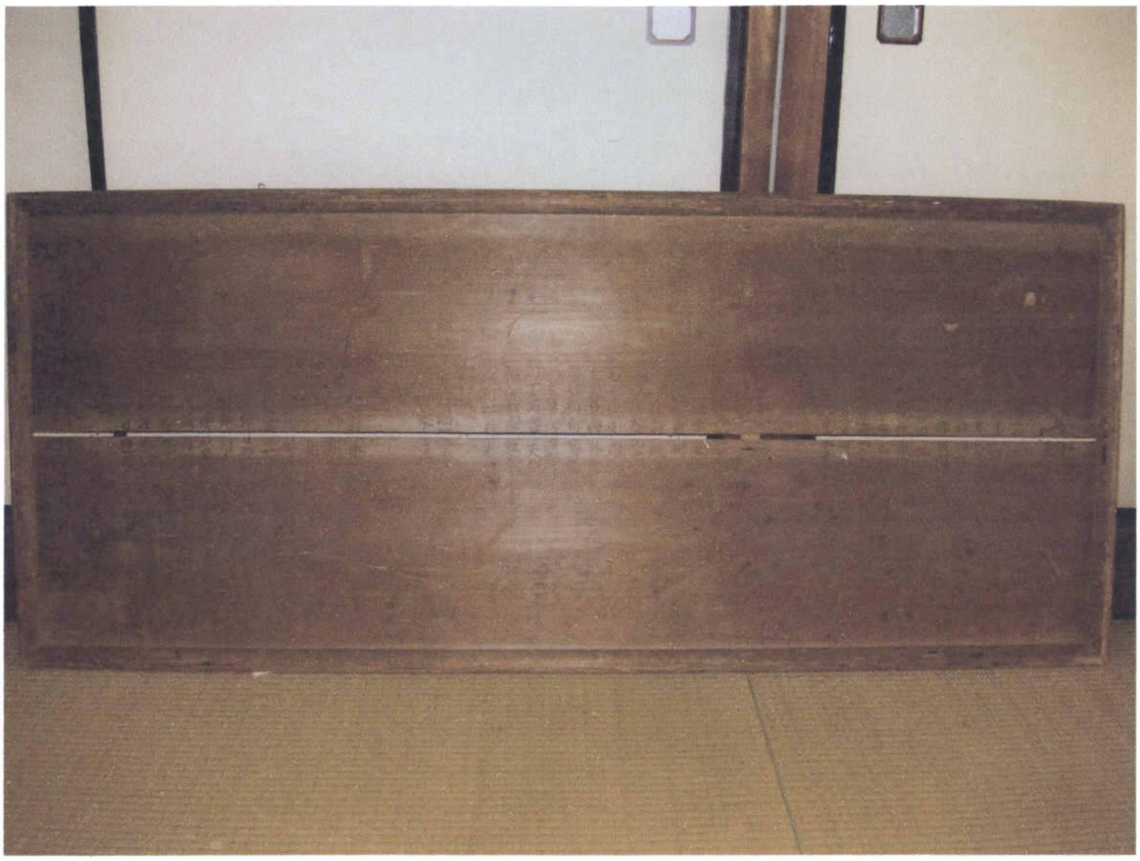
第１章　四日市市・神明神社の算額

第１節　寛政２年の算額

この算額は縦 67 cm、横 158 cmであり、３問が扱われている。



（１）第１問は森川永興によるものであり、問題文と答文は以下の通りである。

[問題文 1]

「闡微算法一十五條第一答
今有二十八種香如図環形初日薫起角二日氐三日尾四日女次第如斯逐日薫之
有客曰ﾃ聞箕木為名香他日来而復嗅此香今経幾何日来茲乎
答曰依左術得一十三日」

冒頭に“闡微算法”とあることからもわかるように、この問題は、長崎の和算家・武田濟美が寛延３年（1750 年）に著した『闡微算法』に遺題として掲載された 15 問のうちの１つである。問題の現代訳は以下の通りである。

[現代語訳]

「今、28 種の香がある。図のように、環形におき、初日に角を薫し、二日に氐を、三日に尾を、四日に女を、次第にこのように、日を逐って之を薫する。

客が言った。

箕木は名香と聞く。他日来て、この香を嗅ぎたい。幾日を経て茲に来ればよいか。

答えて言う。左に示す術により、13 日を得る」

『闡微算法』では、箕木ではなく、心木が問題となっているのであるが、森川は問題を変更して解答している。この種の問題はいわゆる「継子立て」の類題で、嗅いだ香は取り除いていくのが暗黙の了解事項なのであるが、森川は嗅いだ香を取り除かないで解答している。この問題の現代的解法は以下の通りである。

[現代的解法]

それぞれの香に、次のように番号を付ける。角を１、亢を２、氐を３、・・・とし、最後の軫を 28 とする。そして、a_nを「n日目に嗅ぐ香の番号」とすると、

$a_1=1$、$a_2=3$、$a_3=6$、$a_4=10$、・・・

となる。よって、$a_n=\dfrac{1}{2}n(n+1)$ となる。

ところで、箕に当てられる番号は 7、35、63、・・・であり、一般に、$7+28k$と表される。したがって、$\dfrac{1}{2}n(n+1)=7+28k$ となる整数nを求めればよい。

$n^2+n-(14+56k)=0$を、解の公式によって解けば、

$$n=\frac{1}{2}\left\{-1\pm\sqrt{1+4(14+56k)}\right\}=\frac{1}{2}\left(-1\pm\sqrt{224k+57}\right)$$

となるが、ここで、nは整数より、$224k+57$は平方数でなければならない。

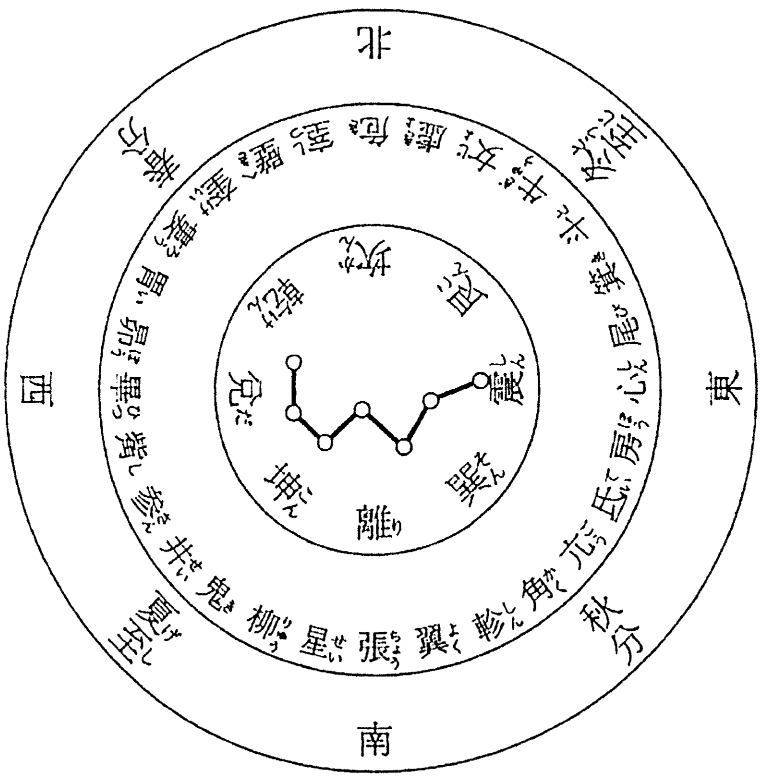
$k=1,2,3,\cdots$とすると、$k=3$のとき、$224\times3+57=729=27^2$となる。よって、

$$n=\frac{-1+27}{2}=13$$

となり、13日目という解が得られる。

[注釈]

この問題の二十八種の香の図は、高松塚古墳の天井に描かれた天文図であり、二十八宿図と呼ばれる。下の図のように、東西南北の四方に分けられ、四つの霊獣に当てられ、それぞれ七つずつの星宿を配当する。



（2）第2問は森川永興の門人・伊藤永信によるものであり、問題文、答文および術文は以下の通りである。

[問題文2]

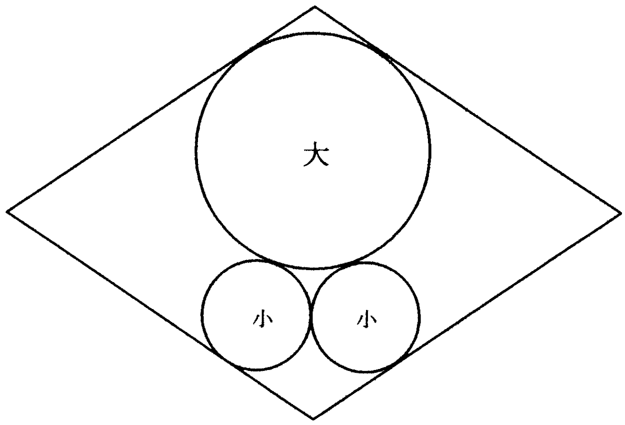
「自問自答

今菱内如図容大円一箇小円二箇外餘積若干〇只云菱長短和若干大小円径差若干問小円径幾何

答曰依左術得小円径

術曰立天元一為小円径如左為大円径自之与小円径冪二段相併以円周率乗之

得数与外餘積四之以円径率乗之得数相併寄角位
　従是文繁故略之却而演段大概演如左
第一立天元一為二箇菱面寄天位○大小円径相併乗天位小円径乗短二数相併以円径率乗之以減角位内餘自之寄左○大小円径相併自之減小円径冪餘以円径率冪与長冪乗之相消
第二長短相乗倍之以円径率乗之以角位相消而后依術起本術得開方式幾乗方開之得小円径」



[現代語訳]

今、図のように、菱形の中に大円１個、小円２個が内接していて、外餘積（菱形から大円１個と小円２個を除いた面積）が与えられている。菱形の対角線の長さの和と、大円と小円の直径の差が与えられたとき、小円の直径はいくらか。

答えて言う。左の術（以下の内容）により小円径が得られる。

計算方法として、小円の直径を$2r$とおく。大円の直径を$2R$とおき、これを自乗して、小円の直径を自乗したものの２倍を併せて円周率をかけたものと、外餘積Sの４倍に円径率をかけたものを併せたものを角位と置く。

[注釈]

(1) $\left(4R^2+8r^2\right)\pi_l+4S\pi_r$＝角位、と置くことになる。

(2) $\pi\approx\dfrac{\pi_l}{\pi_r}$と分数で近似したとき、$\pi_l$を周率、$\pi_r$を径率という。当時はこのようにして円周率を近似する方法があった。

建部賢弘の『綴術算経』では次のように書かれている。

「始関氏零約ノ術ヲ用ルニ径一周三ヲ累加シテ径周ノ率トシ、其径率ヲ以テ周率ヲ除シ得ル所ノ数定周ヨリ少キニ到ルトキハ、径一周四ヲ加テ求之」

これを現代訳すると、

「始に、関氏は零約の術（分数を小数に変換する方法）を用いて、径 1 周 3 を累加して、各々径周の率とし、径率を以って周率を除し、得る所の数が定周より少なきに至る時には、径 1 周 4 を加えて之を求める。」

関孝和の業績をまとめた『括要算法』では、円周率の近似分数を次のような値とし、名前を付けている。

	周率	径率	周数
古法	三	一	三整
密率	二十二	七	三一四二八五七一四三弱
智術	二十五	八	三一二五整
桐陵法	六十三	二十	三一五整
和古法	七十九	二十五	三一六整
陸績率	一百四十二	四十五	三一五五五五五五五五五五六弱
徽術	一百五十七	五十	三一四整

関は「定率」として、周率三百五十五、径率一百一十三を得ている。

(3)「角位」を表す式は、$4\pi_r\left\{\left(R^2+2r^2\right)\dfrac{\pi_l}{\pi_r}+S\right\}=4\pi_r\left(\pi R^2+2\pi r^2+S\right)$と変形できるから、菱形の面積の$4\pi_r$倍を意味していることになる。

[現代語訳の続き]

これより文が繁雑になるため、およそのことを書くことで、これを略する。

第一に、菱形の一辺の2倍を天位とおき、大小円の直径を併せて天位をかけたものと、小円の直径に短軸をかけたものを併せて円径率をかける。こうして得たものを角位から引き、これを自乗したものを左と置く。次に、大小円の直径を併せて自乗し、それから小円の直径の自乗を引いたものに円径率の自乗と長軸の自乗をかけたものを左と等しく置く。

[注釈]

(4) 菱形の短軸を$2a$、長軸を$2b$と置くと、$2\sqrt{a^2+b^2}$＝天位、となる。

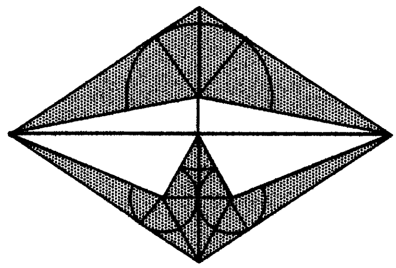
(5) $\left\{2(2R+2r)\sqrt{a^2+b^2}+4ra\right\}\pi_r$を角位から引き、自乗したものを左と置くのであるから、

$$\left[\left(4R^2+8r^2\right)\pi_l+4S\pi_r-\left\{2(2R+2r)\sqrt{a^2+b^2}+4ra\right\}\pi_r\right]^2=\text{左、となる。}$$

ところで、$\{2(2R+2r)\sqrt{a^2+b^2}+4ra\}\pi_r = 4\pi_r\left(R\sqrt{a^2+b^2}+r\sqrt{a^2+b^2}+ra\right)$である

から、図１の網かけ部分の面積の$4\pi_r$倍を意味していることになる。

図１



そして、角位とは菱形の面積の$4\pi_r$倍を意味していたのであるから、「左」が表す式は、図１の白部分の面積の$4\pi_r$倍を表していることになる。

(6) $\{(2R+2r)^2-(2r)^2\}\pi_r^2(2b)^2$を「左」と等しく置くとあるが、この式は次のように変形することができる。

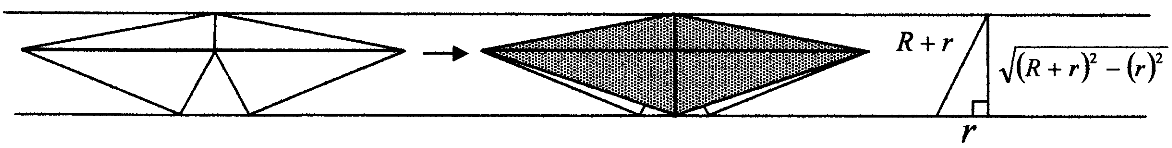
$$\{(2R+2r)^2-(2r)^2\}\pi_r^2(2b)^2 = \left\{2\pi_r b\sqrt{(2R+2r)^2-(2r)^2}\right\}^2$$

そして、中括弧の内の式は、

$$2\pi_r b\sqrt{(2R+2r)^2-(2r)^2} = 4\pi_r \cdot \frac{1}{4\pi_r} \cdot 2\pi_r b\sqrt{(2R+2r)^2-(2r)^2} = 4\pi_r \cdot b\sqrt{(R+r)^2-r^2}$$

と変形できるから、図１の白部分を下の図２のように等積変形することによって得られる網かけ部分の面積の$4\pi_r$倍を表していることになる。

図２



したがって、$\{(2R+2r)^2-(2r)^2\}\pi_r^2(2b)^2$は、図１の白部分の面積の$4\pi_r$倍の自乗を表していることになる。よって、

$$4\{(2R+2r)^2-(2r)^2\}\pi_r^2 b^2 = \left[(4R^2+8r^2)\pi_l + 4S\pi_r - \{2(2R+2r)\sqrt{a^2+b^2}+4ra\}\pi_r\right]^2$$

が成り立つことになる。

[現代語訳の続き]

第二に長軸と短軸をかけて２倍し、円径率をかけて角位と等しくする。術により本術を立て、それによって何乗かの方程式が得られ、この方程式を解いて小円の直径が得られる。

[注釈]

(7) $8ab\pi_r$を角位と等しくするとあるが、$8ab\pi_r=4\pi_r\cdot 2ab$であり、$2ab$は菱形の面積であるから、$8ab\pi_r$は菱形の面積の$4\pi_r$倍を表していることになる。そして、すでに注釈(3)で見たように、角位とは菱形の面積の$4\pi_r$倍なのであった。したがって、

$$8ab\pi_r=\left(4R^2+8r^2\right)\pi_l+4S\pi_r$$

が成り立つことになる。

(8) 上の式と注釈(6)で得られた式、

$$4\left\{(2R+2r)^2-(2r)^2\right\}\pi_r{}^2b^2=\left[\left(4R^2+8r^2\right)\pi_l+4S\pi_r-\left\{2(2R+2r)\sqrt{a^2+b^2}+4ra\right\}\pi_r\right]^2$$

を連立させて解けばよいことになる。

[現代的解法]

注釈(7)で得られた式、$8ab\pi_r=\left(4R^2+8r^2\right)\pi_l+4S\pi_r$の両辺を$4\pi_r$で割ると、

$$2ab=\left(R^2+2r^2\right)\pi+S \quad ・・・①$$

が得られる。また、

$$4\left\{(2R+2r)^2-(2r)^2\right\}\pi_r{}^2b^2=\left[\left(4R^2+8r^2\right)\pi_l+4S\pi_r-\left\{2(2R+2r)\sqrt{a^2+b^2}+4ra\right\}\pi_r\right]^2$$

の両辺の平方根をとり、さらに両辺を$4\pi_r$で割ると、

$$b\sqrt{(R+r)^2-r^2}=\left(R^2+2r^2\right)\pi+S-\left\{(R+r)\sqrt{a^2+b^2}+ra\right\} \quad ・・・②$$

が得られる。

さて、菱形の対角線の長さの和、大円と小円の直径の差が与えられているのであるから、

$2a+2b=\alpha$、$2R-2r=\beta$

とおいて、①と②を連立させ、$2r$（小円の直径）をα、β、π、Sを用いて表すことができればよいことになる。①より、

$$a=\frac{1}{4}\left\{\alpha-\sqrt{\alpha^2-\left(24r^2+8\beta r+2\beta^2\right)\pi-8S}\right\}$$

が得られる。また、②より、

$$a=\frac{2\left(12r^2+4\beta r+\beta^2\right)\pi+8S-\left(4r+\beta\right)\sqrt{\alpha^2-\left(12r^2+4\beta r+\beta^2\right)\pi-4S}-\alpha\sqrt{12r^2+8\beta r+\beta^2}}{4r-2\sqrt{12r^2+8\beta r+\beta^2}}$$

が得られる。したがって、

$$\left(4r-2\sqrt{12r^2+8\beta r+\beta^2}\right)\left\{\alpha-\sqrt{\alpha^2-\left(24r^2+8\beta r+2\beta^2\right)\pi-8S}\right\}$$

$$=4\left\{2\left(12r^2+4\beta r+\beta^2\right)\pi+8S-\left(4r+\beta\right)\sqrt{\alpha^2-\left(12r^2+4\beta r+\beta^2\right)\pi-4S}-\alpha\sqrt{12r^2+8\beta r+\beta^2}\right\}$$

という r についての方程式が得られ、これを解くことによって解が求められる。

(3) 第３問は森川永興の門人・廣田忠興によるものであり、問題文、答文および術文は以下の通りである。

[問題文 3]

「江州日野神社奉納答

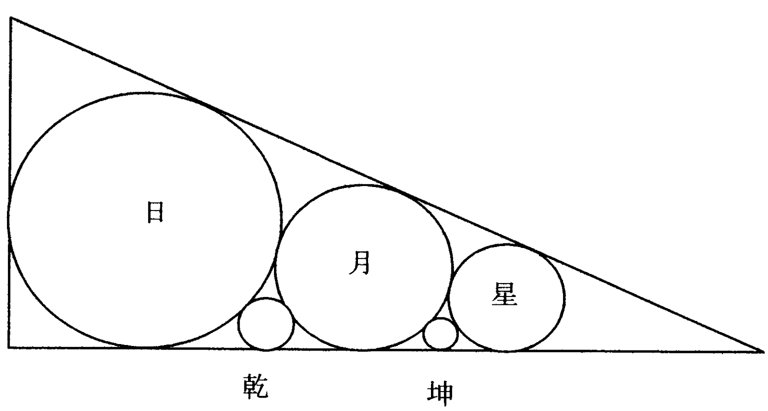
今鈎股内如図容五円乾径若干坤径若干問直得鈎術

答曰依左術得鈎

術曰立天元一為鈎本術略演段如左第一弦日径和内減鈎為股倍之内減日径餘自之加日径羃寄天位〇日月径相併以日径乗之自乗寄左〇日径内減月径自之以天位乗之相消得前式〇鈎羃股羃相併以弦羃相消得後式

第二日月乾径之以矩合為左式〇月星坤径之以矩合為右式

第三依第一第二之図脱日径而后依術求本術得開方式幾乗方開之得鈎合問」



[現代語訳]

江州（現在の滋賀県）にある日野神社に奉納された算額の解答である。

今、図のように、直角三角形の中に５つの円が接してある。乾円の直径と坤円の直径が与えられているとき、鉤（直角三角形の直角を挟む短い方の辺）を得る方法を問う。

答えて言う。左の術（以下の内容）により鉤が得られる。

術（計算方法）曰く、天元の一を立て鉤と為す（鉤をaと置き、方程式を立てる)。解法は以下のように略して示す。

第一として、弦と日円の直径の和から鉤を引いたものを股とし、その股の２倍から日円の直径を引いたものとする。これを自乗し日円の直径の自乗を加えたものを天位とおく。日円と月円の直径を併せて、日円の直径をかけ、これを自乗したものを左とおく。日円の直径から月円の直径を引き、これを自乗して天位をかけたものと左を差し引きし、前式を得る。鉤の自乗と股の自乗を併せて、弦の自乗を差し引きすると、後式が得られる。

[注釈]

（１）弦（斜辺）をc、日円の直径を$2x$、股をbと置くと、$c+2x-a=b$であり、さらに、$(2b-2x)^2+(2x)^2$＝天位、と置くことになる。

（２）月円の直径を$2y$と置くと$\{(2x+2y)2x\}^2$＝左、と置くことになる。

（３）$(2x-2y)^2\{(2b-2x)^2+2x^2\}-\{(2x+2y)2x\}^2=0$・・・前式と置ける。

（４）$a^2+b^2-c^2=0$・・・後式と置ける。

[現代語訳の続き]

第二に日円、月円、乾円の直径を用いて関係式を作り、左式とする。月円、星円、坤円の直径を用いて関係式を作り、右式とする。

[注釈]

(1) 乾円の直径を$2p$と置き関係式を作ると、

$2\sqrt{xp}+2\sqrt{py}=2\sqrt{xy}$・・・左式となる。

(2) 星円の直径を$2z$、坤円の直径を$2q$と置き関係式を作ると、

$2\sqrt{yq}+2\sqrt{qz}=2\sqrt{yz}$・・・右式となる。

[現代語訳の続き]

第三として、第一、第二により図から日円の直径を脱し、術によって本術を求め、それによって何乗かの方程式が得られ、この方程式を解いて鈎を得る。問いに合う。

[注釈]

(1) 「**脱日径**」の意味は不詳である。

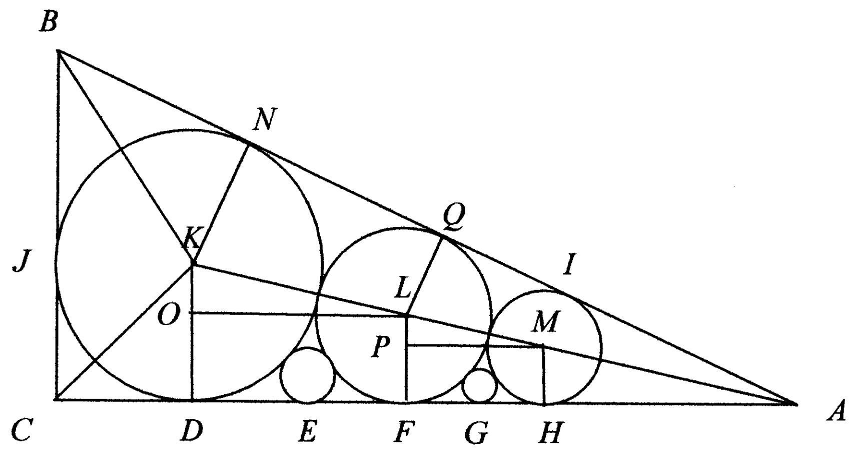
(2) 前式より、b を x,y で表す。

(3) 上記の b を $c+2x-a=b$ に代入し、c を x,y,a で表す。

(4) 上記 (2), (3) を後式に代入して、a についての二次方程式を得て、これを解く。

(5) 次に左式と右式により、x,y を p,q で表し、上記の解に代入して a を p,q で表すことができる。

[現代的解法]



日円、月円、星円、乾円、坤円の半径をそれぞれ x,y,z,p,q とし、鈎、股、弦の長さをそれぞれ a,b,c とする。$DF=DE+EF$, $FH=FG+GH$ より、

$$2\sqrt{xy}=2\sqrt{px}+2\sqrt{py}\ ,\quad 2\sqrt{yz}=2\sqrt{qy}+2\sqrt{qz}$$

となり、

$$\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{y}}=\frac{1}{\sqrt{p}}\quad ,\quad \frac{1}{\sqrt{y}}+\frac{1}{\sqrt{z}}=\frac{1}{\sqrt{q}}$$

が得られる。また、ΔKOL と ΔLPM の相似関係より、

$$(x+y):(y+z)=(x-y):(y-z)$$

となり、

$$y^2=xz$$

が得られる。ここで、$\frac{1}{\sqrt{x}}=X$, $\frac{1}{\sqrt{y}}=Y$, $\frac{1}{\sqrt{z}}=Z$, $\frac{1}{\sqrt{p}}=P$, $\frac{1}{\sqrt{q}}=Q$と置くと、

$$X+Y=P,\quad Y+Z=Q,\quad Y^2=XZ$$

となるから、これを解いて、

$$X=\frac{P^2}{P+Q},\quad Y=\frac{PQ}{P+Q},\quad Z=\frac{Q^2}{P+Q}$$

となる。よって、

$$x=\frac{p\left(\sqrt{p}+\sqrt{q}\right)^2}{q},\quad y=\left(\sqrt{p}+\sqrt{q}\right)^2,\quad z=\frac{q\left(\sqrt{p}+\sqrt{q}\right)^2}{p}\quad\cdot\cdot\cdot①$$

が得られる。

一方、ΔKDAとΔLFAの相似関係より、

$$x:y=(b-x):\left(b-x-2\sqrt{xy}\right)$$

となり、これを変形して、

$$b=\frac{x^2-xy+2x\sqrt{xy}}{x-y}\quad\cdot\cdot\cdot②$$

が得られる。また、ΔKNAとΔLQAの相似関係より、

$$x:y=(c-a+x):\left(c-a+x-2\sqrt{xy}\right)$$

となり、これを変形して、

$$c=\frac{ax-ay-x^2+xy+2x\sqrt{xy}}{x-y}\quad\cdot\cdot\cdot③$$

が得られる。

また、直角三角形ABCの面積に関して、

$$\frac{1}{2}x(a+b+c)=\frac{1}{2}ab$$

が成り立つから、$x(a+b+c)=ab$に②と③を代入して、

$$x\left(a+\frac{x^2-xy+2x\sqrt{xy}}{x-y}+\frac{ax-ay-x^2+xy+2x\sqrt{xy}}{x-y}\right)=a\times\frac{x^2-xy+2x\sqrt{xy}}{x-y}$$

となる。これをaについて解くと、

$$a=\frac{4x\sqrt{xy}}{2\sqrt{xy}-x+y}$$

となるから、ここに①を代入し、さらに、$2p=m$，$2q=n$ と置くと、

$$a=\frac{4p\sqrt{p}\left(\sqrt{p}+\sqrt{q}\right)^2}{\sqrt{q}\left(2\sqrt{pq}-p+q\right)}=\frac{2m\sqrt{m}\left(\sqrt{m}+\sqrt{n}\right)^2}{\sqrt{n}\left(2\sqrt{mn}-m+n\right)}$$

となり、鉤の長さ（a）を乾円の直径（m）と坤円の直径（n）によって表すことができた。

第2節　天保15年の算額

この算額は縦62cm、横88cmであり、下の写真が示すように、1問が扱われている。

この問題は武州忍藩（現在の埼玉県あたり）の石垣宇左衛門知義の門人である柳川安左衛門によって掲額されたものである。この算額の裏面には、柳川の門人である清水中治による文久4年（1864年）の解答が記されている。問題文、答文、および術文は以下の通りである。

[問題文]

「今有如図画累円与狭円仮至五円者為末円図之大円径一百二十一寸八分末円径壱分
　問従初円至末円総計
　答日一十六個
　術日置大円径以末円径四段除之開平方不尽棄之減一個得円数合問」

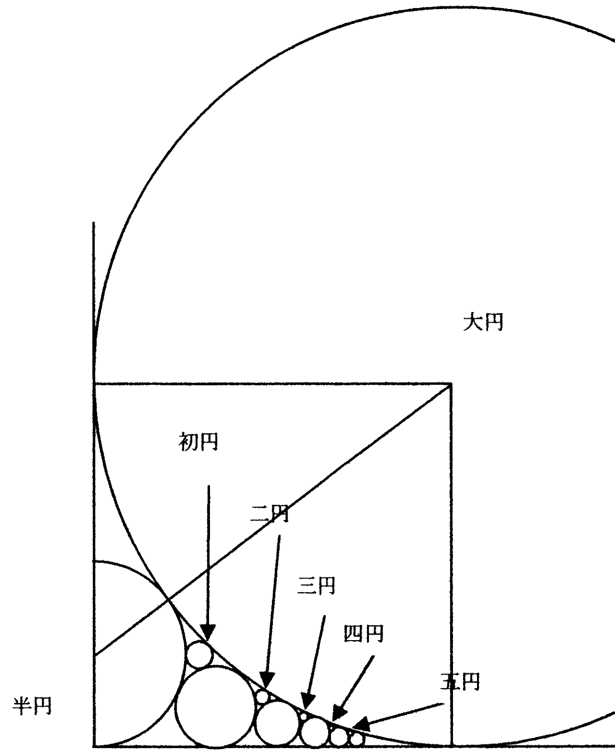
[現代語訳]

今、図のように、大円と大円の接線の間にいくつもの円を描く。この図では五円が末円となっている。大円の直径が 121.8 寸、末円の直径が 0.1 寸であるとき、初円から末円までの総数はいくらか。

答えて言う。16 個。

計算方法は次の通りである。大円の直径を末円の直径の 4 倍で割り、これを開平方し、小数点以下を切り捨てる。これから 1 を引いて円の総計が得られる。

[現代的解答]



図において、大円の半径を R、半円の半径を r_1 とし、それに連結して底辺に接する円の半径をそれぞれ $\{r_n : n = 2,3,4,\cdots\}$ とする。そして、これらと大円との間に接する円の半径を $\{t_n : n = 1,2,3,\cdots\}$ とする。

まず、大円の半径と半円と大円の中心を結んだ線、そして外接線から作られる直角三角形において、三平方の定理より、

$$(R + r_1)^2 = (R - r_1)^2 + R^2$$

$$\cos B = \frac{b^2 + b^2 - PQ^2}{2 \cdot b \cdot b} = \frac{2b^2 - PQ^2}{2b^2} \quad \cdots ①$$

となる。また、ΔABC において同様に、

$$\cos B = \frac{(a+b)^2 + (b+c)^2 + (a+c)^2}{2(a+b)(b+c)} = \frac{b^2 + ab + bc - ac}{(a+b)(b+c)} \quad \cdots ②$$

となる。①②より、

$$\frac{2b^2 - PQ^2}{2b^2} = \frac{b^2 + ab + bc - ac}{(a+b)(b+c)}$$

となり、これを整理すると PQ^2 の値は、

$$PQ^2 = \frac{4acb^2}{(a+b)(b+c)}$$

と得られる。同様に、

$$PE^2 = \frac{4adb^2}{(a+b)(b+d)} \quad , \quad QE^2 = \frac{4cdb^2}{(b+c)(b+d)}$$

となる。次に、円 D と円 B の接点を E とし、直線 PE に Q から下した垂線の足を F とする。また、EG を円 B の直径とする。

図 2

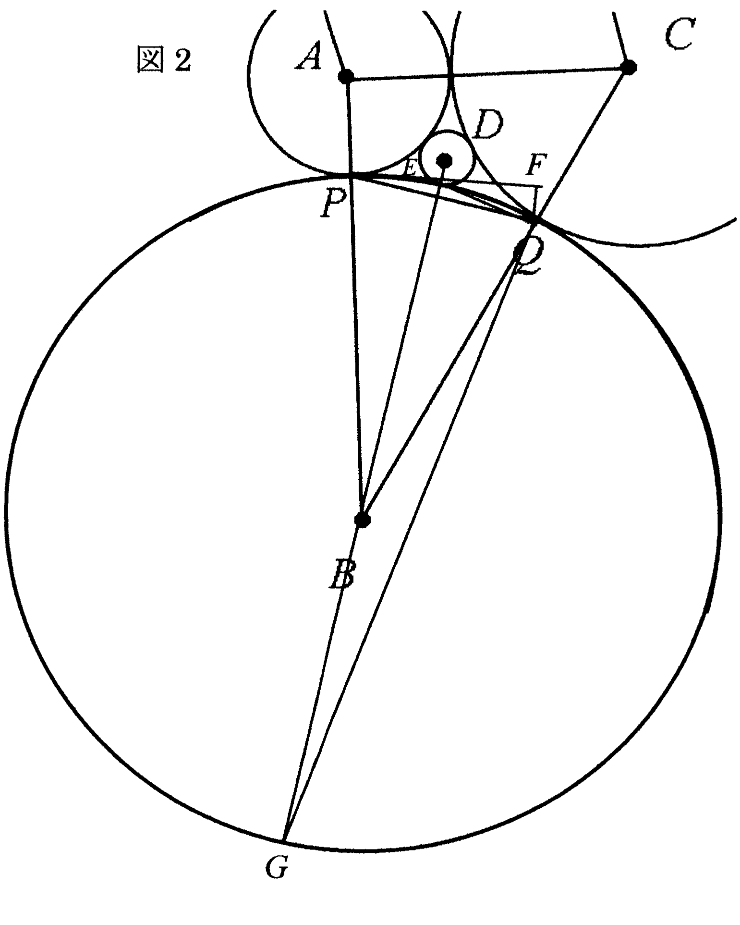


図2より、二つの直角三角形ΔPQFとΔGFQにおいて相似関係が成り立つ。

よって、$FQ:QE=PQ:EG$となり、$FQ=\dfrac{QE\cdot PQ}{EG}$と表せる。ゆえに、

$$FQ^2=\frac{QE^2\cdot PQ^2}{EG^2}=\frac{\dfrac{4cdb^2}{(d+b)(b+c)}\times\dfrac{4acb^2}{(a+b)(b+c)}}{(2b)^2}$$

$$=\frac{4ab^2c^2d}{(a+b)(d+b)(b+c)^2}$$

を得る。また、ΔEQFにおいて三平方の定理より、

$$EF^2=QE^2-FQ^2$$

$$=\frac{4cdb^2}{(d+b)(b+c)}-\frac{4ab^2c^2d}{(a+b)(d+b)(b+c)^2}$$

$$=\frac{4cdb^3(a+b+c)}{(a+b)(d+b)(b+c)^2}$$

となる。ΔPQFにおいて三平方の定理より、

$$PQ^2=PF^2+FQ^2=(PE+EF)^2+FQ^2$$

$$=PE^2+2PE\cdot EF+EF^2+FQ^2$$

ここで、$QE^2=EF^2+FQ^2$となるので、

$$PQ^2=PE^2+2PE\cdot EF+QE^2$$

よって、以上の値を代入すると、

$$\frac{4acb^2}{(a+b)(b+c)}=\frac{4adb^2}{(a+b)(b+d)}+2\sqrt{\frac{4adb^2}{(a+b)(b+d)}}\sqrt{\frac{4cdb^3(a+b+c)}{(a+b)(d+b)(b+c)^2}}+\frac{4cdb^2}{(b+c)(b+d)}$$

となり、この式を整理すると、

$$\frac{4acb^2}{(a+b)(b+c)}=\frac{4adb^2}{(a+b)(b+d)}+\frac{8bd\sqrt{abc(a+b+c)}}{(a+b)(b+c)(b+d)}+\frac{4cdb^2}{(b+c)(b+d)}$$

$$abc(b+d)=abd(b+c)+2d\sqrt{abc(a+b+c)}+bcd(a+b)$$

$$d=\frac{abc}{ab+bc+ca+2\sqrt{abc(a+b+c)}}$$

よって、デカルトの円定理が得られる。

第３節　文久３年の算額

この算額は縦 56cm、横 121.5cm であり、下の写真が示すように１問が扱われている。

この問題は加藤知義の門人である清水貞信によって掲額されたものである。問題文、答文および術文は以下の通りである。

［問題文］

「今有如図円内隔弦隠容大等累不知其円箇数仮画累円五箇大円径若干等円径若干尾円径若干従首円至尾円問総計術如何

答曰如左

術曰置大円径二段以等円径除之加一個極数以大円径四段除等円径名前加一個四之名后以尾円径除等円径減一個以后除之開平方之減前較乗極数不尽棄之得円数合問」

［現代語訳］

今、図のように、円の中に大円、等円、累円がそれぞれ接している。累円の個数は不明であるが、図では 5 個が描かれている。大円の直径、等円の直径、尾円の直径が与えられているとき、首円から尾円までの円の個数を求める方法

を問う。

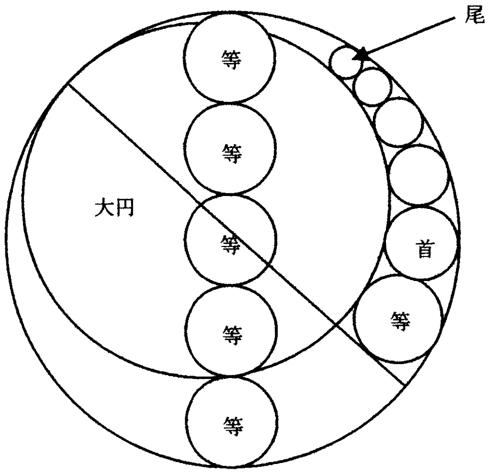
[注釈]

この問題文における「隔」は接する状態にあることを意味するが、続く「弦隠」の意味は必ずしも明確ではない。ここでは、大円や等円などを含む大きな円を外円とし、首円に外接する等円が、大円と外円の中心を結ぶ線分（外円の直径）に接していると解釈する。すなわち「弦（外円の直径）が隠されている」と解釈して解答する。

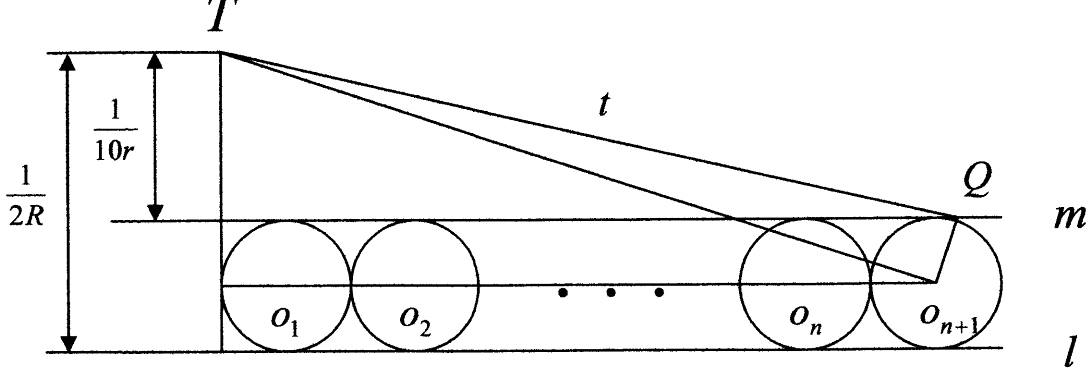
[現代的解法]

外円と大円の内接点をTと置き、Tを中心とする半径1の円によって外円、大円、累円を反転させる。等円の半径をrとすると、外円の直径は$10r$であるから、外円は点Tから$\frac{1}{10r}$の距離にある直線lに反転させられる。また、大円の直径を$2R$とすると、大円は点Tから$\frac{1}{2R}$の距離にあって、直線lに平行な直線mに反転させられる。一方、等円、首円、・・・、尾円は平行な2直線lとmに接し、さらに互いに接して反転させられる。

[原図]



[反転図]



首円の半径をr_2、それに外接する等円の半径を$r_1(=r)$とし、尾円の半径をr_{n+1}とすると、首円から尾円までの円の個数はnとなる。よって、nをR、r、r_{n+1}を用いて表すことが課題となる。

反転図において、反転円O_{n+1}の半径をr_{n+1}'とおき、点Tから反転円O_{n+1}への接線を$TQ=t$と置くと、

$$r_{n+1}'=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2R}-\frac{1}{10r}\right)$$

となる。また、

$$TO_{n+1}^{\ 2}=\left(\frac{1}{10r}+\frac{1}{4R}-\frac{1}{20r}\right)^2+(2n+1)^2\left(\frac{1}{4R}-\frac{1}{20r}\right)^2$$

が成り立つ。

ところで、一般に、$\dfrac{r_{n+1}}{r_{n+1}'}=\dfrac{1}{t^2}$が成り立つから、$t^2=\dfrac{1}{r_{n+1}}\left(\dfrac{1}{4R}-\dfrac{1}{20r}\right)$となる。したがって、直角三角形$TO_{n+1}Q$において、

$$\left(\frac{1}{20r}+\frac{1}{4R}\right)^2+(2n+1)^2\left(\frac{1}{4R}-\frac{1}{20r}\right)^2=\left(\frac{1}{4R}-\frac{1}{20r}\right)^2+\frac{1}{r_{n+1}}\left(\frac{1}{4R}-\frac{1}{20r}\right)$$

が成り立つ。これをnについて解くと、

$$n=\sqrt{\frac{5rR(5r-R-r_{n+1})}{r_{n+1}(5r-R)^2}}-\frac{1}{2}$$

となり、nをR，r，r_{n+1}を用いて表すことができた。